ISSN 2074-5281

научно-практический журнал

МАТЕМАТИКА для школьников

1 2023

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР

ПРЯМЫЕ В КЛУМБОВОМ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКЕ

ДЮЖИНА ЗАДАЧ – ПРОСТЫХ, НО…

Это диво, так уж диво!

По воспоминаниям Ольги Павлищевой, старшей сестры А.С. Пушкина, в детстве, когда будущий поэт ещё учился дома, «арифметика казалась для него недоступною, и он часто над первыми четырьмя правилами, особенно над делением, заливался горькими слезами».

После этих слов в памяти невольно всплывают дивные строки из «Сказки о царе Салтане» (1831):

Море вздуется бурливо,
Закипит, подымет вой,
Хлынет на берег пустой,
Расплеснётся в скором беге —
И останутся на бреге
Тридцать три богатыря...
Все равны, как на подбор;
Старый дядька Черномор
С ними из моря выходит
И попарно их выводит…

Да, 33 на 2 нацело не делится, и последний богатырь остался без пары. Выходит, Пушкина подвела арифметика? Нет, конечно. Этому курьёзу можно найти вполне разумное и логичное объяснение, и даже не одно. Поэт мог бы указать и другие числа без ущерба для ритма и рифмы: либо оставить на берегу 32 богатыря, либо выстроить 33 по трое. Однако он отказался от обоих «правильных» вариантов.

Одним из прототипов истории о царе Салтане была народная сказка, которую поэт услышал в 1824 году, будучи в ссылке в Михайловском, от своей няни Арины Родионовны. В ней говорилось о 34 родных братьях: 33 царевича появились на свет обычными детьми, а 34-й «уродился чудом — ножки по колено серебряные, ручки по локотки золотые, во лбу звезда, в заволоке месяц». По сюжету так их и разделили: посадили всех царевичей в одну бочку, а царицу с чудесным сыном в другую и бросили в море. В пушкинской версии братьев сменили 33 богатыря и родная сестра их царевна Лебедь.

Как видим, поэт решил сохранить исконно сказочное число 33. И имелось для него на выбор два подходящих делителя: 3 и 1. Стало быть, богатыри могли выстроиться либо в небольшую колонну по трое, либо в длинную колонну по одному. Кстати, некоторые художники их так и изобразили — вразрез с текстом.

Окончание см. на с. 3 обложки.

МАТЕМАТИКА для школьников

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1 2023

В НОМЕРЕ:

Научно-практический журнал для учащихся старшего и среднего возраста

Рукописи, поступившие в редакцию, не рецензируются и не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы

Главный редактор
Е.А. Бунимович
Заместитель главного редактора
С.И. Калинин
Редакторы
Н.М. Карпушина,
В.П. Норин,
Л.В. Панкратова,
М.А. Родионов,
Т.Н. Сабурова,
А.Н. Соколова,
Д.В. Широков
Выпускающий редактор
И.А. Моргунова
Компьютерная вёрстка
С.В. Уральская

Адрес редакции и издательства:
корреспонденцию направлять по адресу:
127254 , г. Москва, а/я 62
Телефоны: **8 (495) 619-52-87, 619-83-80**
Факс: **619-52-89**
E-mail:
matematika@schoolpress.ru
Интернет
http://www.школьнаяпресса.рф

Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77–9198 от 14 июня 2001 г.
Формат 84 × 108 /16. Усл. п. л. 3,0. Изд. № 3734. Заказ
Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13

В оформлении обложки использован фрагмент картины Джоса Лейса из цикла «Magic Carpets»

Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI.

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова
МПГУ,
v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ (7–9 КЛАССЫ)

В статье предлагаются комбинаторные задачи по геометрии, решение которых развивает комбинаторные представления и мышление учащихся 7–9 классов.

В последнее время интерес к комбинаторике в школьном курсе математики заметно возрос. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в новую Примерную рабочую программу основного общего образования (Математика) [1]. Формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников входит в число основных целей обучения математике. Изучение основ комбинаторики развивает навыки организации перебора и подсчёта числа вариантов, в том числе, в прикладных задачах.

Однако обычно, когда говорят об элементах комбинаторики, имеют в виду задачи алгебраического содержания. Здесь мы рассмотрим комбинаторные задачи по геометрии для учащихся 7–9 классов, направленные на формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления обучающихся. Часть из них имеется в учебнике геометрии [2]. Рекомендуем также книгу [3], в которой имеются комбинаторные задачи по геометрии повышенного уровня трудности.

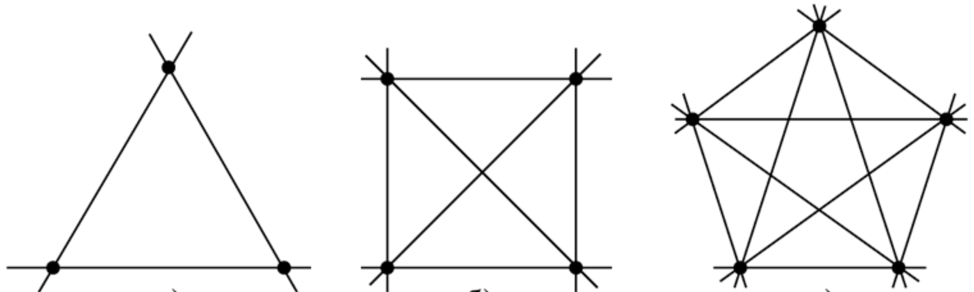
1. Прямые. Одной из первых аксиом геометрии, относящейся к взаимному расположению точек и прямых на плоскости, является аксиома о том, что через любые две точки плоскости проходит единственная прямая. Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием уровня трудности.

1.1. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) трёх; б) четырёх; в) пяти точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Ответ: а) 3; б) 6; в) 10 (рис. 1).

1.2*. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Решение. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Выясним, сколько прямых проходит через точку A_1 и оставшиеся точки. Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно $n - 1$. Заметим, что



а) б) в)

Рис. 1

рассуждения, проведённые для точки A_1, справедливы для любой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит $n-1$ прямая, то число подсчитанных прямых будет равно $n(n-1)$. Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при $n = 3$ получаем $n(n-1) = 6$, а число прямых, на самом деле, равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчёте мы каждую прямую подсчитали дважды и поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, равно

$\frac{n(n-1)}{2}$.

Приведём ещё одно решение этой задачи. Выясним, на сколько увеличивается число прямых при добавлении новой точки к данным. Через две точки проходит одна прямая. Если к данным точкам добавляется третья точка, то к этой прямой добавляются две прямые, проходящие через третью точку и одну из двух данных. Аналогично, если добавить n-ю точку A_n к данным $n-1$ точкам $A_1, \ldots, A_{n-1}$, то к числу прямых, проходящих через различные пары из точек $A_1, \ldots, A_{n-1}$, добавятся $n-1$ прямых, проходящих через точку A_n и одну из точек. Общее число прямых равно сумме $1 + 2 + \ldots + (n-1)$. Она равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, имеет место формула

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Эта формула применяется при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задаётся двумя точками, то мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значения, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2.

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2=190$.

Полученная формула является частным случаем формулы для числа сочетаний C_n^k из n элементов по k. Она показывает, сколькими способами можно выбрать k элементов из данных n элементов.

Для её вывода рассмотрим сначала формулу для числа размещений (упорядоченных наборов) A_n^k из n элементов по k.

Первый элемент из данных n элементов можно выбрать n способами; второй

элемент из оставшихся $n-1$ элемента можно выбрать $n-1$ способом; …; k-й элемент из оставшихся $n-k+1$ элементов можно выбрать $n-k+1$ способом. Следовательно, упорядоченный набор, состоящий из k элементов, можно выбрать $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ способом, то есть имеет место формула

$$A_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

В частности, число упорядоченных наборов, из k элементов по k равно $k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, то есть равно $k!$.

Следовательно, число сочетаний (неупорядоченных наборов) C_n^k из элементов по k будет выражаться формулой

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Выведем следующее важное соотношение между числами сочетаний:

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k.$$

Для этого зафиксируем какой-нибудь элемент из данных n элементов. Тогда число способов, которыми можно выбрать k элементов из оставшихся $n-1$ элементов, равно C_{n-1}^k. Число способов, которыми можно выбрать k элементов, в которые входит зафиксированный элемент, равно числу способов, которыми можно выбрать $k-1$ элемент из оставшихся $n-1$ элементов, то есть равно C_{n-1}^{k-1}. Общее число способов, которыми можно выбрать k элементов из данных n элементов равно сумме $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$, то есть имеет место искомое равенство.

Следующая серия задач связана с числом попарных пересечений прямых на плоскости. Из сформулированной выше аксиомы непосредственно следует, что две прямые могут иметь не более одной общей точки.

Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием степени трудности.

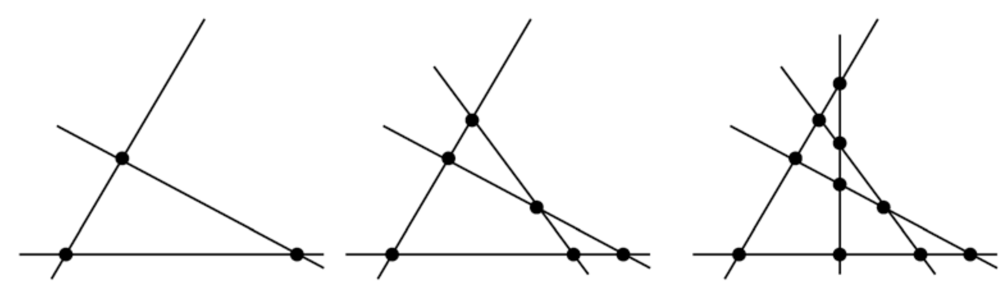
1.3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) три; б) четыре; в) пять прямых?

Ответ: а) 3; б) 6; в) 10 (рис. 2).

1.4*. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке.

В этом случае каждая прямая имеет $n-1$ точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 1.2. Так как всего прямых n, и на каждой прямой $n-1$ точка, то их общее число будет



а) б) в)

Рис. 2

Количество путей из точки A в эти вершины равно 1 и 2. Будем последовательно брать всё более удалённые вершины сетки. Заметим, что число путей, соединяющих вершину A с вершиной сетки, равно сумме числа путей, соединяющих вершину A с пройденными соседними вершинами. В результате получаем, что число путей, соединяющих точки A и B, равно 55.

Числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Обладают тем свойством, что каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Эти числа называются числами Фибоначчи по имени итальянского математика Леонардо Пизанского (известного как Фибоначчи).

Такие числа возникают во многих задачах, в частности, в задаче о кроликах, которой занимался Фибоначчи. Для знакомства с этими числами рекомендуем книгу [5].

Список источников

1. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика, http://www.instrao.ru/primer
2. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия: учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2019.
3. *Шклярский Д.О.* и др. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.
4. *Успенский В.А.* Треугольник Паскаля. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979.
5. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. — 6-е изд. — М.: Наука, 1992.

МАТЕМАТИКИ ШУТЯТ

Проще простого

Заболела учительница русского языка. На замену поставили математика, он пришёл на урок и стал объяснять падежи.

— Именительный: кто? что? — начинает перечислять он. — Родительный: кого? чего? Дательный: кому?.. — а дальше не помнит.

Тогда он непринужденно говорит:

— Выведем второй вопрос из имеющихся данных. Обозначим неизвестное слово через X и составим пропорцию:

кого — чего

кому — X,

откуда X = чего • кому / кого. Теперь ко и го сокращаем и получаем X = чему. Итак, дательный падеж — кому? чему?

Математики тоже шутят / Автор-сост. С.Н. Федин. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2009. — 208 с.

* * *

Таблица умножения

Известный немецкий алгебраист Эрнст Эдуард Куммер (1810–1893) очень плохо умел считать в уме. Если при чтении лекции ему надо было выполнить простенький расчёт, он обычно прибегал к помощи студентов.

Однажды ему надо было умножить 7 на 9. Он начал вслух рассуждать:

— Гм... это не может быть 61, потому что 61 — простое число. Это не может быть и 65, потому что 65 делится на 5. 67 — тоже простое число, а 69 — явно слишком много. Остается только 63...

(Цит. по книге: Kutzler B. B. Mathematikerwitze & Mathematikwitze. 2006; перевод Ю. Фролова.)

К.А. Иванов
(г. Минск, Беларусь)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР

В статье представлено описание основных элементов 36 рациональных треугольников. Обсуждаются возможности использования этой информации в учебном процессе.

Треугольник называется рациональным, если все его стороны и площадь могут быть выражены рациональными, в частности, целыми числами. Такие треугольники удобны для составления геометрических задач на вычисление, так как их основные элементы (высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей, радиусы всех вневписанных окружностей, синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы углов) выражаются рациональными числами. В данной заметке приводятся численные значения основных элементов тридцати шести рациональных треугольников и обсуждаются возможности использования этого материала на уроках геометрии для быстрого обеспечения учеников класса индивидуальными заданиями и для архивирования геометрических упражнений.

Представленные в заметке треугольники описываются тремя таблицами, каждая из которых содержит сведения о двенадцати рациональных треугольниках. Все треугольники первой таблицы – прямоугольные, второй – остроугольные и третьей – тупоугольные. В таблицах используются традиционные обозначения для элементов треугольника. Стороны треугольника, противоположные вершинам A, B, C, обозначены буквами a, b, c, а углы при этих вершинах — буквами α, β, γ соответственно. Буквами h, m, l с нижними индексами a, b, c обозначаются высоты, медианы, биссектрисы треугольника, проведённые к сторонам a, b, c. Символами r_a, r_b, r_c обозначены радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон a, b, c. Площадь треугольника, радиусы вписанной, описанной окружностей и полупериметр обозначены соответственно буквами S, r, R и p.

Числа, находящиеся в таблице под знаком квадратного корня, не имеют кратных простых множителей.

С помощью таблиц легко составляются различные геометрические задачи на вычисление. Практически во все задачники по геометрии входят следующие традиционные упражнения.

1. По длинам сторон треугольника определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

2. Найти все или некоторые элементы прямоугольного треугольника, если известна одна из его сторон и один из острых углов.

3. Найти все или некоторые элементы треугольника, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона и

два прилежащих к ней угла; в) три стороны треугольника.

Основной целью составления таблиц была задача: получить достаточное количество материала для обучения решению именно таких упражнений. Умение решать данные упражнения даёт учащимся возможность познакомиться с решениями более сложных задач и освоить новые способы их решения (например, разобраться с решением треугольников методом составления уравнений).

В том случае, когда алгоритм решения одной из таких задач известен, можно с помощью таблиц получить для учебных целей необходимое количество её вариантов с различными числовыми данными. Рассмотрим задачу об отыскании площади треугольника по радиусу вписанной окружности и отрезкам, на которые она делит одну из сторон треугольника. Так как стороны a, b, c треугольника делятся вписанной окружностью на отрезки длины $p - b$ и $p - c$, $p - a$ и $p - c$, $p - a$ и $p - b$ соответственно, то по каждой из таблиц для тупоугольных и остроугольных треугольников можно сформировать тридцать шесть однотипных упражнений с различными числовыми данными.

При составлении заданий по таблицам необходимо предварительно решить хотя бы одно из каждого класса составленных упражнений и оценить трудности, возникающие при его выполнении. Это позволит правильно ответить на вопрос о наиболее рациональном использовании составленных упражнений в учебном процессе.

Например, при решении треугольника по данным значениям a, l_a и углу α методом составления уравнений возникает симметрическая система, а при решении треугольника по углу α и медианам m_b и m_c — однородная. Зная это заранее, можно оптимизировать занятия, на которых планируется обсуждение соответствующих вопросов, уделив достаточное количество времени как геометрическим, так и алгебраическим сторонам их решения. Решая вычислительные задачи по геометрии треугольника, полезно формулировать соответствующие задачи на построение треугольника циркулем и линейкой. В случаях, когда решения таких задач известны учителю и посильны обучаемым, можно предлагать их школьникам. Эти задачи, как правило, оказываются сложнее и интереснее, чем задачи на вычисление. Если для решения треугольника по стороне a, биссектрисе к ней l_a и углу α или по углу α и биссектрисам m_b и m_c можно обойтись теоремой косинусов и умением решать системы алгебраических уравнений, то для построения треугольника циркулем и линейкой по этим же элементам потребуется применить гораздо больше геометрических знаний и творческих усилий. Такие задачи можно предлагать хорошо подготовленной аудитории слушателей на кружках и факультативных занятиях. То же самое можно сказать о большинстве задач на вычисление, решаемых методом составления уравнений.

В заметках [1] и [2] обсуждался вопрос о том, как можно быстро обеспечить учеников класса индивидуальными заданиями при изучении тем «Решение неравенств методом интервалов» и «Пропорциональные отрезки в треугольниках», используя при этом только мел и классную доску. С помощью таблиц 1–3 также можно быстро составлять индивидуальные задания по теме «Решение треугольников». Для этого можно поступить следующим образом.

1) Выписать на доске под словом ***«дано»*** три столбца необходимой длины с данными из таблиц 1–3 (см. таблицу 4).

2) Под словом ***«найти»*** обозначить буквами необходимое количество столбцов и в каждом из них записать названия искомых элементов треугольника (см. таблицу 4).

3) Каждому ученику класса сообщить номер его варианта в виде упорядоченного набора длины 3, вторым элементом которого является буква, а первым и третьим — числа. Ученик, получивший вариант (1, Z, 4) должен по данным, расположенным в первой строке таблицы, найти элемент треугольника из столбца Z под номером 4, то есть в данном случае S.

Таким образом, по таблице 4 можно получить 4×12 индивидуальных заданий. Если в этой таблице добавить одну строку с условием и один столбец искомых элементов, то количество различных вариантов станет равным 5×20.

Можно упростить нумерацию вариантов, называя только число, обозначающее номер строки с данными элементами треугольника и название искомого элемента. В этом случае вариант (1, Z, 4) будет читаться как (1, S), а вариант (2, y, 3), как (2, h_c) (см. таблицу 4). Если под словом ***«найти»*** записать только один столбец, то номер варианта будет просто совпадать с номером строки.

Зная решение одного из упражнений на нахождение каких-либо неизвестных элементов треугольника через заданные, можно использовать его как шаблон для составления одинаковых по смыслу упражнений с различными числовыми данными, взятыми из таблиц 1–3. В таблицах 5 и 6 настоящей заметки приведены примеры упражнений-шаблонов для прямоугольных и произвольных треугольников соответственно. Каждое упражнение записано в виде упорядоченного набора символов, заключённого в круглые скобки. Элементы набора, находящиеся до вертикальной черты, считаются заданными, а элементы, расположенные после черты — искомыми. Например, запись задачи в виде набора (h_a; h_b; l_c | $\sin\gamma$) означает, что по данным высотам h_a, h_b треугольника и биссектрисе l_c требуется найти $\sin\gamma$. Запись упражнения, в котором по средней стороне треугольника, радиусу описанной окружности R и площади S необходимо найти радиус вневписанной окружности r, будет выглядеть так: ($a < b < c$; b; R; S | r).

Условие задачи, записанное в форме строки (γ; $\gamma > 90°$; m_c; h_c; R | r), расшифровывается следующим образом: по радиусу описанной окружности R, медиане m_c и высоте h_c, проведенным к стороне, лежащей против тупого угла γ, найти радиус вписанной окружности r. В задачах таблицы 5 о прямоугольных треугольниках символами a_c и b_c обозначены ортогональные проекции катетов a и b на гипотенузу c, а символами $(h_c)_b$ и $(h_c)_a$ — ортогональные проекции высоты h_c на катеты b и a. Рядом с некоторыми задачами в таблице 6 указана литература, в которой можно найти решение данной задачи или указания к поиску её решения.

В таблице 1, описывающей элементы прямоугольных треугольников, отсутствуют столбцы $(h_c)_a$ и $(h_c)_b$ проекций высоты h_c на катеты a и b. В случае необходимости недостающие данные легко находятся по формулам $(h_c)_a = h_c \cdot \cos\alpha$ и $(h_c)_b = h_c \cdot \cos\beta$. Придавая символам, находящимся в наборах таблиц 5 и 6 до вертикальной черты, конкретные числовые значения из таблиц 1–3, мы будем получать одинаковые по смыслу упражнения с различными числовыми данными. Таким образом, используя данные из таблиц 1–3 и форму записи упражнений, подобную записям, помещенным в таблицах 5 и 6 данной статьи, можно заархивировать достаточно большое количество числовых упражнений на решение треугольников. Так как каждая из таблиц 1–3 содержит сведения обо всех элементах двенадцати различных прямоугольных (таблица 1), остроугольных (таблица 2) и тупоугольных (таблица 3) треугольников соответственно, то с их помощью по задачам-шаблонам таблиц 5 и 6 настоящей заметки можно составить достаточное число различных вычислительных упражнений.

Изложенные соображения, кроме непосредственного использования в учебном процессе, могут быть полезны при составлении компьютерных программ, предназначенных для формирования и печати одинаковых по смыслу индивидуальных заданий с различными числовыми данными.

Список источников

1. *Иванов К.А.* Тридцать один вариант за три минуты? // Математика в школе. — 1991. — №3.
2. *Иванов К.А.* О пропорциональных отрезках в треугольнике // Математика в школе. — 2004. — №8.
3. *Лурье М.В.* Геометрия. Техника решения задач. Учебное пособие. М., УНЦ ДО, Физматлит, 2002.
4. *Новоселов С.И.* Специальный курс тригонометрии. М., «Высшая школа», 1976.
5. *Парахневич В.А., Парахневич Е.В., Фельдман А.М.* Сборник задач по геометрии. Минск, «Аверсэв», 2007.
6. *Рывкин А.А., Ваховский Е.Б.* Сборник задач по математике для поступающих в вузы. М., «Мир и образование», 2003.

Приложения

Таблица 4

	Дано			Найти		
	a	b	$\cos\gamma$	x	y	z
1	13	14	5/13	r_a	h_a	m_b
2	13	20	16/65	r_b	h_b	m_c
3	15	34	13/85	r_c	h_c	m_a
4	17	25	7/25	r	R	S

Таблица 1

Прямоугольные треугольники

№	p	a	p-a	b	p-b	c	p-c	$\cos\frac{\alpha}{2}$	$\cos\frac{\beta}{2}$	$\sin\frac{\alpha}{2}$	$\sin\frac{\beta}{2}$	S	r	R	h_a	h_b	h_c	r_a	r_b	r_c	m_a	m_b	m_c	l_a	l_b	l_c
1	6	3	3	4	2	5	1	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	6	1	$\frac{5}{2}$	4	3	$\frac{12}{5}$	2	3	6	$\frac{\sqrt{73}}{2}$	$\sqrt{13}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{120\sqrt{13}}{17}$	$\frac{36\sqrt{13}}{29}$	$\frac{45}{14}$
2	15	5	10	12	3	13	2	$\frac{5}{\sqrt{26}}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{1}{\sqrt{26}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	30	2	$\frac{13}{2}$	12	5	$\frac{60}{13}$	3	10	15	$\frac{\sqrt{601}}{2}$	$\sqrt{61}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{12\sqrt{26}}{5}$	$\frac{5\sqrt{13}}{3}$	$\frac{60\sqrt{2}}{17}$
3	20	8	12	15	5	17	3	$\frac{4}{\sqrt{17}}$	$\frac{5}{\sqrt{34}}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	60	3	$\frac{17}{2}$	15	8	$\frac{120}{17}$	5	12	20	$\sqrt{241}$	$\frac{\sqrt{481}}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{15\sqrt{17}}{4}$	$\frac{8\sqrt{34}}{5}$	$\frac{120\sqrt{2}}{23}$
4	28	7	21	24	4	25	3	$\frac{7}{5\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	$\frac{3}{5}$	84	3	$\frac{25}{2}$	24	7	$\frac{168}{25}$	4	21	28	$\frac{\sqrt{2353}}{2}$	$\sqrt{193}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{120\sqrt{2}}{7}$	$\frac{35}{4}$	$\frac{168\sqrt{2}}{61}$
5	45	9	36	40	5	41	4	$\frac{9}{\sqrt{82}}$	$\frac{5}{\sqrt{41}}$	$\frac{1}{\sqrt{82}}$	$\frac{4}{\sqrt{41}}$	180	4	$\frac{41}{2}$	40	9	$\frac{360}{41}$	5	36	45	$\frac{\sqrt{6481}}{2}$	$\sqrt{481}$	$\frac{41}{2}$	$\frac{40\sqrt{82}}{9}$	$\frac{9\sqrt{41}}{5}$	$\frac{360\sqrt{2}}{49}$
6	66	11	55	60	6	61	5	$\frac{11}{\sqrt{122}}$	$\frac{6}{\sqrt{61}}$	$\frac{1}{\sqrt{122}}$	$\frac{5}{\sqrt{61}}$	330	5	$\frac{61}{2}$	60	11	$\frac{660}{61}$	6	55	66	$\frac{\sqrt{14521}}{2}$	$\sqrt{1021}$	$\frac{61}{2}$	$\frac{60\sqrt{122}}{11}$	$\frac{11\sqrt{61}}{6}$	$\frac{660\sqrt{2}}{71}$
7	42	12	30	35	7	37	5	$\frac{6}{\sqrt{37}}$	$\frac{7}{\sqrt{74}}$	$\frac{1}{\sqrt{37}}$	$\frac{5}{\sqrt{74}}$	210	5	$\frac{37}{2}$	35	12	$\frac{420}{37}$	7	30	42	$\sqrt{1261}$	$\sqrt{1933}$	$\frac{37}{2}$	$\frac{84\sqrt{170}}{13}$	$\frac{13\sqrt{85}}{7}$	$\frac{1092\sqrt{2}}{97}$
8	91	13	78	84	7	85	6	$\frac{13}{\sqrt{170}}$	$\frac{7}{\sqrt{85}}$	$\frac{1}{\sqrt{70}}$	$\frac{6}{\sqrt{85}}$	546	6	$\frac{85}{2}$	84	13	$\frac{1092}{85}$	7	78	91	$\frac{\sqrt{28393}}{2}$	$\frac{\sqrt{1249}}{2}$	$\frac{85}{2}$	$\frac{15\sqrt{85}}{7}$	$\frac{180\sqrt{10}}{37}$	$\frac{36\sqrt{34}}{29}$
9	72	16	56	63	9	65	7	$\frac{8}{\sqrt{65}}$	$\frac{9}{\sqrt{130}}$	$\frac{1}{\sqrt{65}}$	$\frac{7}{\sqrt{130}}$	504	7	$\frac{65}{2}$	63	16	$\frac{1008}{65}$	9	56	72	$\sqrt{4033}$	$\frac{\sqrt{4993}}{2}$	$\frac{65}{2}$	$\frac{63\sqrt{65}}{8}$	$\frac{16\sqrt{130}}{9}$	$\frac{1008\sqrt{2}}{79}$
10	35	20	15	21	14	29	6	$\frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{7}{\sqrt{58}}$	$\frac{1}{\sqrt{29}}$	$\frac{3}{\sqrt{58}}$	210	6	$\frac{29}{2}$	21	20	$\frac{420}{29}$	14	15	35	$\sqrt{541}$	$\frac{\sqrt{2041}}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{21\sqrt{29}}{5}$	$\frac{20\sqrt{58}}{7}$	$\frac{420\sqrt{2}}{41}$
11	63	28	35	45	18	53	10	$\frac{7}{\sqrt{53}}$	$\frac{9}{\sqrt{106}}$	$\frac{2}{\sqrt{53}}$	$\frac{5}{\sqrt{106}}$	630	10	$\frac{53}{2}$	45	28	$\frac{1260}{53}$	16	35	63	$\sqrt{2221}$	$\frac{\sqrt{5161}}{2}$	$\frac{53}{2}$	$\frac{45\sqrt{53}}{7}$	$\frac{28\sqrt{106}}{9}$	$\frac{1260\sqrt{2}}{73}$
12	77	33	44	56	21	65	12	$\frac{11}{\sqrt{130}}$	$\frac{7}{\sqrt{65}}$	$\frac{3}{\sqrt{130}}$	$\frac{4}{\sqrt{65}}$	924	12	$\frac{65}{2}$	56	33	$\frac{1848}{65}$	21	44	77	$\frac{\sqrt{13633}}{2}$	$\sqrt{1873}$	$\frac{65}{2}$	$\frac{56\sqrt{130}}{11}$	$\frac{33\sqrt{65}}{7}$	$\frac{1848\sqrt{2}}{89}$

ISSN 2074-5281

Математика для школьников, 2023, № 1, 1–48

Школьная Пресса